Université Abdelmalek Éssaadi
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Al Hoceima

AP1: Analyse 2 Année: 2019/2020

Sol. de TD:Suites et Séries de Fonctions

séries $N°$3(Partie 2)

Professeur A. MOUSSAID

---

probléme 1

On note, pour tout

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \forall x \in [0, +\infty], \qquad f_n(x) = \frac{x^n}{n(x^{2n}+1)}$$

1. Montrer que la série de fonction $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge simplement sur $D = [0, 1[\cup]1, +\infty[$

   On note S la somme de cette série de fonction .

2. Montrer que S est de classe C^1 sur D et étudier le signe de $S^{'}(x)$ pour $x \in D$
3. Déterminer les limites de S en 1 et en $+\infty$
4. Dresser le tableau de variations de S et tracer l'allure de la courbe représentative de S.

probléme 2

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx}$ est uniformément converge sur $[0, +\infty[$
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx}$ est continue sur $[0, +\infty[$
3. Montrer que la fonction $x \mapsto \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
4. En déduire que pour tout $x \geq 0$, on a :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-nx} = \log(1 + e^{-x})$$